

ÁLGEBRA LINEAR

DATA: 5 / Fevereiro / 2019

Duração: 2 horas

Apresente todos os cálculos e justifique detalhadamente todas as respostas

1. Considere $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \\ c & 3 & 1 \end{bmatrix}$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(20) (a) Apresente os valores de a, b, c para os quais o sistema $AX = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ é possível.

(b) Fixe $a = 2, b = -1, c = 1$.

(25) (b1) Calcule os valores próprios de A .

(25) (b2) É possível construir bases de \mathbb{R}^3 constituídas por vectores próprios de A ?

2. Considere as seguintes afirmações:

(25) (a) Se M é uma matriz quadrada de ordem n tal que $M^2 = I_n$ e \mathbf{v} é vector próprio de M então $\mathbf{v} + M\mathbf{v}$ é vector próprio de M .

(25) (b) Uma aplicação linear de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^n é injectiva se e só se todos os seus valores próprios são não nulos.

Para cada uma, investigue se é verdadeira ou falsa. Faça uma prova sucinta ou apresente um contra-exemplo para justificar cada resposta.

3. Considere a aplicação linear $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definida por

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, 0, x_1 - x_3, 0) \quad \forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

(25) (a) Defina núcleo de uma aplicação linear e apresente uma sequência geradora do núcleo de f com três vectores. Justifique a sua opção.

(25) (b) Apresente uma base para a imagem da aplicação f .

(30) 4. Admita que $\varphi: E \rightarrow E'$ é uma aplicação linear e que F é um subespaço de E . Mostre que $\varphi(F)$ é um subespaço de E' e que $\dim(\varphi(F)) \leq \dim(F)$.